УДК 517.524

РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ ФУНКЦИЙ $\cos(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sch}(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{csch}(x)$, $\sec^2(x)$, $\operatorname{cosec}^2(x)$, $\operatorname{sch}^2(x)$, $\operatorname{csch}^2(x)$

С.Н. Гладковский

Автором предложен элементарный вывод разложения в цепную дробь функций $\cos(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sch}(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{csch}(x)$, $\sec^2(x)$, $\operatorname{cosec}^2(x)$, $\operatorname{sch}^2(x)$, $\operatorname{csch}^2(x)$.

Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь.

Автору не удалось обнаружить ***общий вид разложения*** в цепную дробь для $\cos(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sch}(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{csch}(x)$, $\sec^2(x)$, $\operatorname{cosec}^2(x)$, $\operatorname{sch}^2(x)$, $\operatorname{csch}^2(x)$, ни в общеизвестных справочниках (см., например, [6],[9]), ни в многочисленных монографиях специально посвящённых цепным дробям (см., например, [1],[2],[7],[10], [11],[13],[14],[15],[16],[17],[18]).

В [4,с.305] сказано: " Общий вид разложения в цепную дробь $\cos x$ неизвестен. По методу Висковатого можно найти лишь конечное множество звеньев такого разложения. Например,

$$\cos x = \frac{1}{1+}\,\frac{x^2}{2-}\,\frac{5x^2}{6+}\,\frac{3x^2}{50-}\,\frac{313x^2}{126+\dots} \qquad [\dots\ \dots] \tag{1}$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2+}\,\frac{x^2}{6-}\,\frac{3x^2}{10+}\,\frac{13x^2}{126-\dots} \qquad [\dots\dots] \tag{2}$$

Отсюда, так как $\operatorname{ch} x = \cos ix$, получим следующие разложения:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{1-}\,\frac{x^2}{2+}\,\frac{5x^2}{6-}\,\frac{3x^2}{50+}\,\frac{313x^2}{126-\dots} \qquad [\dots\ \dots] \tag{3}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2-}\,\frac{x^2}{6+}\,\frac{3x^2}{10-}\,\frac{13x^2}{126+\dots} \qquad " \tag{4}$$

В [5,с.110] и [5,с.138] приведены эти же формулы, но со ссылкой на [8,с.168] и [8,с.166,167] – соответственно. Кроме того, в [5,с.138] дана формула:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{\frac{x}{2}}{(1+F)^2 - \frac{x^2}{4}}, \tag{5}$$

где, (см.[5,с.60])

$$F = \frac{x^2/4\times 3}{1+}\ \frac{x^2/4\times 15}{1+}\ \frac{x^2/4\times 35}{1+\dots+}\ \frac{x^2/4\times\left[4(n-1)^2-1\right]}{1+\dots}. \tag{6}$$

Отметим, последняя формула, дабы избежать двусмысленности, должна быть таковой:

$$F = \frac{x^2/(4\times 3)}{1+}\ \frac{x^2/(4\times 15)}{1+}\ \frac{x^2/(4\times 35)}{1+\dots+}\ \frac{x^2/\left(4\times\left[4(n-1)^2-1\right]\right)}{1+\dots}, \tag{7}$$

(например, см.[1, гл.4, § 4.6, (6.1c), с. 142]).

В [8,с.167,168] приведён вывод формул (3), (4) для $\operatorname{ch} x$ методом Висковатого (поскольку для $\cos x$, $\operatorname{ch} x$ "общий вид разложения в цепную дробь неизвестен"), из которых заменой x на ix получены (1), (2) [8,с.168]. Там же указано, что разложение (2) имеется в [3].

Несколько лучше обстоит дело с формулами для $\sin(x)$. Автору удалось найти формулу для $\sin(x)$ в [12,с.138] – без вывода:

$$\sin(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2\times 3 - x^2) + \cfrac{2\times 3x^2}{(4\times 5 - x^2) + \cfrac{4\times 5x^2}{(6\times 7 - x^2) + \dots}}}} \tag{8}$$

В [4,с.304] сказано: " Общий вид разложения в цепную дробь $\sin x$ неизвестен. По методу Висковатого можно найти лишь конечное множество звеньев такого разложения. Например,

$$\sin x = \frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{6-}\,\frac{7x^2}{10+}\,\frac{11x^2}{98-}\,\frac{551x^2}{198+\ldots} \qquad [\ldots\ \ldots] \tag{9}$$

и

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6+}\,\frac{3x^2}{10-}\,\frac{11x^2}{42+}\,\frac{25x^2}{66-\ldots} \qquad ” \tag{10}$$

Далее, [4,с.305], приведены формулы для $\mathrm{sh}(x)$:

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{x}{1-}\,\frac{x^2}{6+}\,\frac{7x^2}{10-}\,\frac{11x^2}{98+}\,\frac{551x^2}{198-\ldots} \qquad [\ldots\ \ldots] \tag{11}$$

и

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{6-}\,\frac{3x^2}{10+}\,\frac{11x^2}{42-}\,\frac{25x^2}{66+\ldots} \qquad ” \tag{12}$$

В [5,с.109] приведены эти же формулы, но со ссылкой на [8,с.165].

В [8,с.162…164] также отмечено, что ”общий вид разложения в цепную дробь неизвестен” и приведён вывод формул (11),(12) для $\mathrm{sh}(x)$ методом Висковатого, из которых заменой x на ix получены (9), (10) [8,с.165]. Там же приведены разложения и для $\frac{x}{\sin x}$ со ссылкой на [3] :

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6-}\,\frac{7x^2}{10+}\,\frac{11x^2}{98-}\,\frac{551x^2}{198+\ldots} \tag{13}$$

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1-}\,\frac{x^3}{6+}\,\frac{3x^2}{10-}\,\frac{11x^2}{42+}\,\frac{25x^2}{66-\ldots} \tag{14}$$

Для вывода ***общего вида разложения*** в цепную дробь функций $\cos(x)$, $\sec(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sch}(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{cosec}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{csch}(x)$ предлагается следующее.

Обратимся к формуле Эйлера [4, гл.5, §1, п.6, (5.16), с.281] обращения ряда в цепную дробь :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \frac{c_1 x}{1-}\,\frac{c_2 x}{c_1 + c_2 x -}\,\frac{c_1 c_3 x}{c_2 + c_3 x -}\cdots\frac{c_{n-2} c_n x}{c_{n-1} + c_n x -}\cdots \tag{15}$$

Для ряда [5, гл.3, §1, п.2,2 ,с.93]

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{16}$$

видим, что непосредственно (15) нельзя использовать, так как коэффициенты с нечётными индексами равны нолю. Полагая $x^2 = p$, имеем

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^k}{(2k)!} = 1 - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{24}p^2 - \tfrac{1}{720}p^3 + \tfrac{1}{40\,320}p^4 - \ldots \tag{17}$$

Рассматривая (17) как исходный ряд, получаем

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \neq 0 \tag{18}$$

ни при каких целых n. Для (17) формула (15) примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = c_0 + \frac{c_1 p}{1-}\,\frac{c_2 p}{c_1 + c_2 p -}\,\frac{c_1 c_3 p}{c_2 + c_3 p -}\cdots\frac{c_{n-2} c_n p}{c_{n-1} + c_n p -}\cdots \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что (19) представимо в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = c_0 + \cfrac{c_1 p}{1 - \cfrac{c_2 p}{E_1}} \tag{20}$$

где

$$E_n = c_n + c_{n+1} p - \frac{c_n c_{n+2} p}{E_{n+1}}. \tag{21}$$

Полагая $E_n(p) = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} W_n(p)$ для любого неотрицательного целого n и подставляя (18) в (20) и (21), после несложных преобразований получим:

$$W_n = (2n+1)(2n+2) - p + \frac{(2n+1)(2n+2)p}{W_{n+1}} \tag{22}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = 1 - \frac{1}{2}\frac{p}{1+\dfrac{p}{W_1}} \tag{23}$$

Если выразить результат не через $W_1,\ p,$ а через $W_0,\ x,$ то имеем

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{W_0 + x^2}, \tag{24}$$

$$\sec(x) = 1 + \frac{x^2}{W_0}, \tag{25}$$

где

$$W_n = (2n+1)(2n+2) - x^2 + \frac{(2n+1)(2n+2)x^2}{W_{n+1}}. \tag{26}$$

Если в (24),(25),(26) заменим x на ix и полагая $U_n(x) = W_n(ix)$ для любого неотрицательного целого n, то получим разложения для $\mathrm{ch}(x),\ \mathrm{sch}(x)$:

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{U_0 - x^2} \tag{27}$$

$$\mathrm{sch}(x) = 1 - \frac{x^2}{U_0}, \tag{28}$$

где

$$U_n(x) = (2n+1)(2n+2) + x^2 - \frac{(2n+1)(2n+2)x^2}{U_{n+1}(x)} \tag{29}$$

Отметим, что для секанса и гиперболического секанса полученные цепные дроби не являются равноценными; впрочем, как и для функций $W_0(x) = \dfrac{x^2\cos(x)}{1-\cos(x)}$ и $U_0(x) = \dfrac{x^2\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1}$.

Для вывода формул общего вида разложения в цепную дробь функций $\sin(x)$, $\mathrm{cosec}(x),\ \mathrm{sh}(x),\ \mathrm{csch}(x)$ в качестве исходного выберем ряд [5, гл.3, §1, п.2,1 ,с.93]

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{30}$$

Видим, что непосредственно (15) нельзя использовать, так как коэффициенты с чётными индексами равны нулю. Поступим следующим образом. Полагая $x \neq 0,$ разделим обе части (30) на x ; пусть $x^2 = p,$ тогда (30) примет вид

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{p^k}{(2k+1)!} = 1 - \tfrac{1}{6}p + \tfrac{1}{120}p^2 - \tfrac{1}{5040}p^3 + \tfrac{1}{362\,880}p^4 - \dots \tag{31}$$

Рассматривая (31) как исходный ряд, получаем

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \neq 0 \tag{32}$$

ни при каких целых n. Обратимся к (20), (21). Для (31) эти формулы примут вид:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 + \frac{-\frac{1}{6}p}{1-\dfrac{\frac{1}{120}p}{E_1}}, \tag{33}$$

где

$$E_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{(2n+3)!}p - \frac{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\dfrac{(-1)^n}{(2n+5)!}p}{E_{n+1}}. \tag{34}$$

Полагая $E_n(p) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+3)!}S_n(p)$ для любого неотрицательного целого $n,$ после несложных преобразований получим:

$$S_n(p) = (2n+2)(2n+3) - p + \frac{(2n+2)(2n+3)p}{S_{n+1}(p)} \tag{35}$$

и

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}\frac{p}{1 + \frac{p}{S_1(p)}}. \qquad (36)$$

Если выразить результат не через $S_1(p),\ p,$ а через $S_0(x),\ x,$ то имеем

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{S_0(x) + x^2}, \qquad (37)$$

или

$$\sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{S_0(x) + x^2}\right), \qquad (38)$$

$$\frac{1}{\sin(x)} = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{S_0(x)}, \qquad (39)$$

где

$$S_n(x) = (2n+2)(2n+3) - x^2 + \frac{(2n+2)(2n+3)x^2}{S_{n+1}(x)}. \qquad (40)$$

Если в (38),(39),(40) заменим x на ix и полагая $T_n(x) = S_n(ix)$ для любого неотрицательного целого $n,$ то получим разложения для $\operatorname{sh}(x)$ и $\operatorname{csch}(x)$:

$$\operatorname{sh}(x) = x\left(1 + \frac{x^2}{T_0(x) - x^2}\right) \qquad (41)$$

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{T_0(x)}, \qquad (42)$$

где

$$T_n(x) = (2n+2)(2n+3) + x^2 - \frac{(2n+2)(2n+3)x^2}{T_{n+1}(x)} \qquad (43)$$

Отметим, что для косеканса и гиперболического косеканса полученные цепные дроби не являются равноценными; впрочем, как и для функций $S_0(x) = \dfrac{x^2\sin(x)}{x - \sin(x)}$ и $T_0(x) = \dfrac{x^2\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}(x) - x}$.

Формулы (24) и (26) позволяют получить разложения для $\sec^2(x)$ и $\operatorname{cosec}^2(x)$. Как известно, (например, см. [6, (4.3.25), с.38])

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)\ , \qquad (44)$$

откуда:

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) = \frac{2}{1 + \cos(2x)} \qquad (45)$$

и

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \operatorname{cosec}^2(x) = \frac{2}{1 - \cos(2x)} \qquad (46)$$

Для аргумента $2x$ формулы (24) и (26) примут вид:

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{W_0(2x) + 4x^2} \qquad (47)$$

$$W_n(2x) = (2n+1)(2n+2) - 4x^2 + \frac{4(2n+1)(2n+2)x^2}{W_{n+1}(2x)}. \qquad (48)$$

Полагая $W_n(2x) = 2R_n(x)$ для любого неотрицательного целого n, после несложных преобразований получим:

$\cos(2x) = 1 - \dfrac{2x^2}{R_0(x) + 2x^2}$, откуда

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) = 1 + \frac{x^2}{R_0(x) + x^2} \quad (49)$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \operatorname{cosec}^2(x) = 2 + \frac{1}{x^2}R_0(x) \quad (50)$$

где

$$R_n(x) = (2n+1)(n+1) - 2x^2 + \frac{2(2n+1)(n+1)x^2}{R_{n+1}(x)}. \quad (51)$$

Если в (49),(50),(51) заменим x на ix и полагая $H_n(x) = R_n(ix)$ для любого неотрицательного целого n, после несложных преобразований получим разложения для $\operatorname{sch}^2(x)$ и $\operatorname{csch}^2(x)$:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{sch}^2(x) = 1 - \frac{x^2}{H_0(x) - x^2} \quad (52)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} = \operatorname{csch}^2(x) = \frac{1}{x^2}H_0(x) - 2 \quad (53)$$

где

$$H_n(x) = (2n+1)(n+1) + 2x^2 - \frac{2(2n+1)(n+1)x^2}{H_{n+1}(x)}. \quad (54)$$

Литература

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде /пер. с англ. под ред. Гончара А.А. М.: Мир, 1986, – 502с. ил.
2. Джоунс У., Трон У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения /ред. пер. с англ.: И.Д. Софронов. М.: Мир, 1985, – 414с. ил.
3. Корноухов Н.В. Прочность устойчивых стержневых систем. М., 1949.
4. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
5. Математический анализ. Вычисление элементарных функций/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Физматгиз, 1963.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган /пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной М.: Наука, 1979, 832 стр. с илл.
7. Стилтьес Т.И. Исследования о непрерывных дробях /пер. с фр. под ред. Ахиезера Н.И. Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1936.– 156 с.
8. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Гостехиздат, 1956., 204 с.
9. A.Cuyt, V.Brevik Petersen, B.Verdonk, H.Waadeland , W.B.Jones. Handbook of Continued fractions for Special Functions. New York: Springer, 2008.– 431s.
10. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions. Analytic theory and applications.London: Addison-Wesley P C, 1980.– 457s.
11. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. Amsterdam, London, New York, Tokyo: North Holland, 1992.– 623s.
12. Olds C.D. Continued fractions. Yale: Mathematical Association of America, 1963.– 162 s
13. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 1. 3ed., Gottingen: Teubner, 1954.– 200 s.
14. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 2. 3ed., Stuttgart: Teubner, 1957.– 322 s.
15. Rockett A.M., Szuesz P. Continued fractions. London: World Scientific Publishing, 1992.– 196s.
16. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 1. Groningen: Noordhoff, 1918.– 467s.
17. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 2. Groningen: Noordhoff, 1918.– 609 s.

18. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions. New York: Chelsea, 1948.– 445s.

S.N. Gladkovskii

Continued fraction expansion for function's $\cos(x)$, $\sec(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sch}(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{cosec}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{csch}(x)$, $\sec^2(x)$, $\mathrm{cosec}^2(x)$, $\mathrm{sch}^2(x)$, $\mathrm{csch}^2(x)$

The autor propose the elementary derivation of the continued fraction expansion for function's $\cos(x)$, $\sec(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sch}(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{cosec}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{csch}(x), \sec^2(x), \mathrm{cosec}^2(x), \mathrm{sch}^2(x), \mathrm{csch}^2(x)$

Keywords: continued fraction, chain fraction

Гладковский Сергей Николаевич

E-mail: journaly2010@bk.ru

ОТЗЫВ

на работы Гладковского С.Н. по разложениям в цепные дроби некоторых элементарных функций и их линейных комбинаций

В статьях Гладковского С.Н. указываются разложения в цепные дроби некоторых элементарных функций и их линейных комбинаций. Известно, что конструкция цепной дроби не является линейной. Это означает, что знание разложений в цепную дробь функций f и g не позволяет автоматически разложить в цепную дробь сумму f+g (или какую-либо другую линейную комбинацию C_1f+C_2g, где $C_1C_2\neq0$) этих функций.

Разложения в цепные дроби основных элементарных функций хорошо известны, а написать разложения всех линейных комбинаций и невозможно и не очень нужно. Необходимость в данной деятельности может возникнуть только лишь тогда, когда при решении какой-либо другой задачи потребуется данное конкретное разложение.

Считаю публикацию работ Гладковского С.Н. по разложениям в цепные дроби в журнале «Математические заметки» нецелесообразной.

Доктор физ.-мат наук В.И.Буслаев

26 декабря 2011 г.